

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，解答が分数になる場合は，すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 A, B, C, D, E の5人の並び方を考える。

(1) 5人のうち，3人を選び，横1列に並ぶ並び方は ア 通りある。

(2) 5人が横1列に並ぶとき，AとEが両端である並び方は イ 通りある。

(3) 5人が横1列に並ぶとき，AがEよりも左に並ぶ並び方は ウ 通りある。

(4) 5人が横1列に並ぶとき，B, C, Dの3人が続いて並ぶ並び方は エ 通りある。

(5) 5人が横1列に並ぶとき，B, C, Dのどの2人も隣り合わない並び方は オ 通りある。

(6) 5人が円形に並ぶとき，A, Eが隣り合わない並び方は カ 通りある。

〔2〕 k, m, n を正の定数とし, α, β, θ を実数とする。

(1) 方程式 $x^2 - kx + 9 = 0$ が異なる 2 つの解 α と 3α をもつとき, その 2 つの解は $x = \boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ で, $k = \boxed{\text{ケ}}$ である。ただし, $\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ク}}$ とする。

(2) 方程式 $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x + m = 0$ が異なる 2 つの解 β と 3β をもつとき, $\beta = \boxed{\text{コ}}$ で, $m = \boxed{\text{サ}}$ である。

(3) 方程式 $2\cos^2 x - n \cos x = 0$ が, $0 \leq x \leq \pi$ の範囲に異なる 2 つの解 θ と 3θ をもつとき, $\theta = \boxed{\text{シ}}$ で, $n = \boxed{\text{ス}}$ である。

〔3〕 $OA = 1$, $OB = 2$ である $\triangle OAB$ において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ である。辺 AB の長さは $\boxed{\text{セ}}$ であり, $\triangle OAB$ の面積は

$\boxed{\text{ソ}}$ である。次に, 点 O から辺 AB に下ろした垂線の交点を H とすると,

$\overrightarrow{OH} = \boxed{\text{タ}} \vec{a} + \boxed{\text{チ}} \vec{b}$ である。

ここで, 点 H を通り, 辺 OA に平行な直線と辺 OB との交点を C とすると,

$\overrightarrow{CH} = \boxed{\text{ツ}} \vec{a}$ であり, $\triangle OCH$ の面積は $\boxed{\text{テ}}$ である。

Ⅱ Xさんはある銀行から2000万円を借り入れて住宅を購入した。この元金2000万円の返済について、詳細は次のとおりである。

- ・返済期間は30年とする。
- ・返済は借り入れを行った翌月から毎月1日に行われ、支払回数は
30年×12か月＝360回とする。毎月の返済額は、一定であり、360回で返済が
終わるように決定される。
- ・利息は月利1%（毎月の返済における利率は1%）の複利法で計算する。

図1は毎月の返済額の内訳、図2は元金残高と元金返済額との関係を表している。

〔1〕 初回の返済について考える。

初回の返済額 C （万円）は、初回の利息額と初回の元金返済額の合計となる。
ここで、初回の利息額 R_1 （万円）は元金 A （万円）に対して月利1%を掛けた額となる。また、初回の元金返済額 B_1 （万円）は C （万円）から R_1 （万円）を差し引いた額となる。なお、初回の返済終了時点の元金残高 A_1 （万円）は A （万円）から B_1 （万円）を差し引いた額となる。

つまり、 R_1 は A を用いて、 $R_1 = \boxed{\text{ア}} A$ と表される。さらに、
 $C = B_1 + R_1$ より、 $B_1 = C - \boxed{\text{ア}} A$ となる。よって、 $A_1 = A - B_1$ より、
 $A_1 = \boxed{\text{イ}} A - C$ となる。

〔2〕 n 回目 (n は $2 \leq n \leq 360$ の自然数) の返済について初回と同様に考える。

2 回目以降の毎月の返済額 C (万円) についても、利息額と元金返済額の合計となる。ここで、 n 回目の利息額 R_n (万円) は $(n - 1)$ 回目の返済終了時点の元金残高 A_{n-1} (万円) に対して月利 1 % を掛けた額となる。また、 n 回目の元金返済額 B_n (万円) は C (万円) から R_n (万円) を差し引いた額となる。なお、 n 回目の返済終了時点の元金残高 A_n (万円) は A_{n-1} (万円) から B_n (万円) を差し引いた額となる。

つまり、 R_n は A_{n-1} を用いて、 $R_n = \boxed{\text{ウ}} A_{n-1}$ と表される。さらに、 $C = B_n + R_n$ より、 $B_n = C - \boxed{\text{ウ}} A_{n-1}$ となる。よって、 $A_n = A_{n-1} - B_n$ より、 $A_n = \boxed{\text{エ}} A_{n-1} - C$ となる。

これより、 $2 \leq n \leq 360$ のとき、数列 $\{A_n\}$ の一般項を A を用いて表すと、

$$A_n = \left(\boxed{\text{オ}} \right) 100C + \boxed{\text{カ}} A \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となることがわかる。

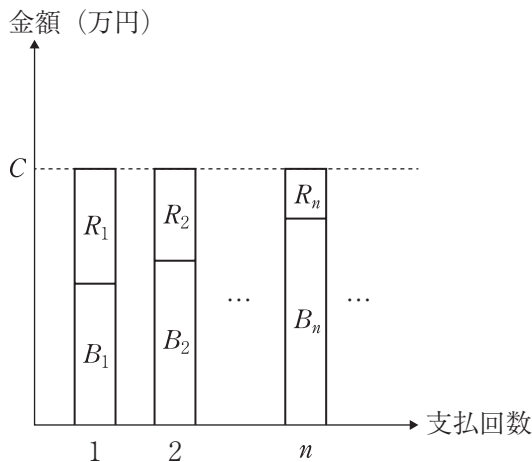


図1 毎月の返済額の内訳

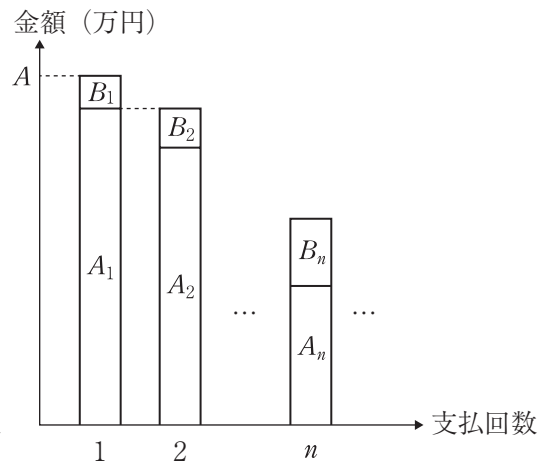


図2 元金残高と元金返済額との関係

(次のページに続く)

以下の解答にあたっては、必要に応じて表1，表2の値を使用すること。

- 〔3〕 360回で返済が終わるためには、毎月の返済額 C （万円）がいくらになるかを考える。 C を求めるには、①において $n = 360$ ， $A = 2000$ ， $A_{360} = 0$ とすればよい。したがって、 C は キ 万円となることがわかる。ただし、キ については小数第2位を四捨五入すること。なお、毎月の返済額が キ 万円のとき、返済総額（360回の支払総額）は ク 万円となる。

- 〔4〕 毎月の返済額 C が キ 万円のとき、209回目の返済後における元金残高 A_{209} は ケ 万円となる。また、初回から数えて コ 回目の返済終了後に元金残高が初めて A の半分を下回ることになる。

表1： $(1+r)^n$ の値（ r は月利を表す）

	$n = 209$	$n = 360$
$r = 0.01$	8.00	35.95
$r = 0.001$	1.23	1.43

表2： $\log_{10}x$ の値

x	$\log_{10}x$	x	$\log_{10}x$
1.01	0.0043	1.05	0.0212
1.02	0.0086	1.06	0.0253
1.03	0.0128	2	0.3010
1.04	0.0170	3	0.4771

Ⅲ A, B, C の 3 人がじゃんけんを 1 回する試行を考える。その結果によって次の

①, ②により点数が与えられる。

①勝ち負けが決まったときは, 1 人だけ勝った場合も 2 人が勝った場合も勝った人には 1 点を与える。負けた人は 0 点とする。

②あいこ (引き分け) のときは, 3 人とも 0 点とする。

次の問いに答えよ。

〔1〕 この試行を 1 回行う。

(1) A, B, C のいずれか 1 人の得点が 1 になる確率を求めよ。

(2) A, B, C のいずれか 2 人の得点が 1 になる確率を求めよ。

〔2〕 この試行を 2 回行う。それぞれの人が 2 回の試行で得た点数を合計し, それを合計得点とする。

(1) 3 人のそれぞれの合計得点と同じになる確率を求めよ。ただし, 合計得点が 0 の場合も含むものとする。

(2) A の合計得点が B, C のいずれの合計得点よりも高くなる確率を求めよ。

(3) A の合計得点が B, C のいずれの合計得点よりも高くなったとき, B, C の合計得点がともに 0 である確率を求めよ。