

## 数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の  にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，解答が分数になる場合は，すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

[1]  $a > 0$  とする。2次不等式  $x^2 + (2 - a)x - 2a < 0$  を解くと，

ア  $< x <$   イ となり，2次不等式  $x^2 + 2(a - 1)x - 4a > 0$  を解くと， $x <$   ウ ，  エ  $< x$  となる。

この2つの2次不等式の解が共通範囲を持たないような  $a$  の値の範囲は，

オ  $\leq a \leq$   カ となる。

[2]  $\triangle OAB$  において， $|\vec{OA} + \vec{OB}| = \left| \vec{OA} - \frac{2}{3}\vec{OB} \right| = \sqrt{10}$ ， $OB = 3$

であるとき，内積  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  は  キ ， $OA =$   ク ， $AB =$   ケ である。また， $\triangle OAB$  の面積は  コ となる。

次に，点  $O$  を中心とする半径  $\sqrt{15}$  の円周上を点  $P$  が動くとき， $\triangle PAB$  の面積の最大値は  サ である。

[3] 関数  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  について，方程式  $f(x) = 0$  の解は，

$x =$   シ ，  ス ，  セ である。ただし， シ  $<$   ス  $<$   セ とする。

このとき，曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積は  ソ である。

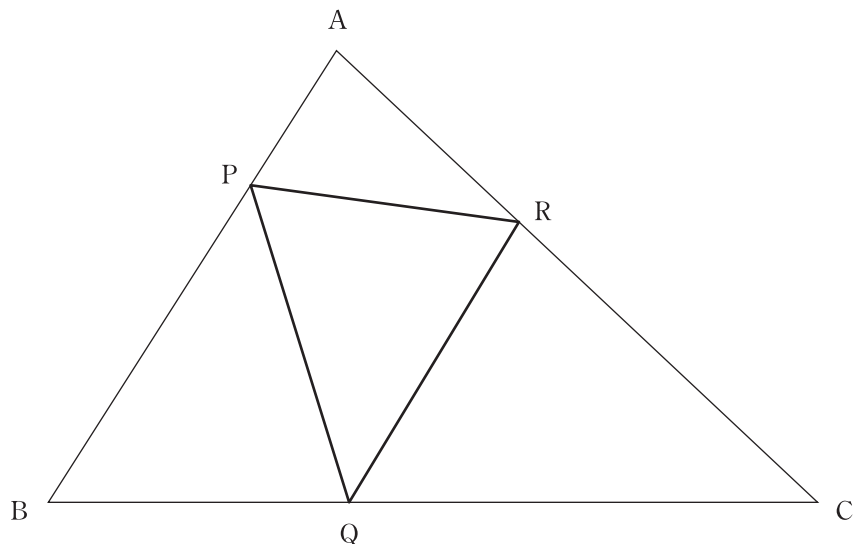
Ⅱ 図のような△ABCの形をした土地があり，その土地開発を次のように計画している。

辺ABを $a:(1-a)$ に内分する点をP，辺BCを $\beta:(1-\beta)$ に内分する点をQ，辺CAを $\gamma:(1-\gamma)$ に内分する点をRとする。図のように，△ABCの中心部に全体の25%の面積を占める△PQRの庭園と，その庭園を囲むように，商業施設建設のための3つの三角形の土地をつくる。ただし， $a+\beta+\gamma=1$ ， $0 < a < \beta < \gamma < 1$ を満たすようにする。

△ABC，△BPQ，△CRQ，△APRの面積をそれぞれ $S$ ， $S_1$ ， $S_2$ ， $S_3$ とすると， $\frac{S_1}{S} = \boxed{\text{ア}}$ ， $\frac{S_2}{S} = \boxed{\text{イ}}$ ， $\frac{S_3}{S} = \boxed{\text{ウ}}$ である。このとき，各三角形の面積の関係により， $a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \boxed{\text{エ}}$ が成立する。

$a\beta\gamma = k$ とおくと， $a$ ， $\beta$ ， $\gamma$ は，方程式 $x^3 - \boxed{\text{オ}}x^2 + \boxed{\text{カ}}x - k = 0$ の実数解であるので， $k$ のとりうる範囲は， $0 < k < \boxed{\text{キ}}$ である。このとき， $a$ ， $\beta$ ， $\gamma$ は， $0 < a < \boxed{\text{ク}} < \beta < \boxed{\text{ケ}} < \gamma < \boxed{\text{コ}}$ を満たしている。

図



Ⅲ 自然数  $n$  の正の約数のうち, 2 番目に大きいものを  $\langle n \rangle$  と表す。  
ただし,  $2 \leq n \leq 100$  とする。たとえば,  $\langle 5 \rangle = 1$ ,  $\langle 9 \rangle = 3$  である。  
次の問いに答えよ。

[1]  $\sum_{k=2}^8 \langle k \rangle$  を求めよ。

[2]  $\sum_{k=2}^{20} \langle 3k \rangle$  を求めよ。

[3]  $\langle n \rangle = 7$  を満たす  $n$  をすべて求めよ。

[4]  $\langle n^2 \rangle = n$  ならば,  $\langle n \rangle = 1$  であることを証明せよ。